b) f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to IR$

et f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $f'(x) \neq 0$

d'où f^{-1} est dérivable sur IR.

c) On a $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1+tg^2 y}$ où $y = f^{-1}(x)$

or $y = f^{-1}(x)$ d'où : $f(y) = x$ et par suite $tg\ y = x$

soit $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

on a : $\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x (f^{-1})'(t)dt = [f^{-1}(t)]_0^x = f^{-1}(x) - f^{-1}(0)$.

or $f(0) = 0$ d'où $f^{-1}(0) = 0$ et par suite pour tout $x \in IR$: $f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

3°/ $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ car : $f(\frac{\pi}{4}) = 1$.

B) Soit $n \in IN^*$ et $a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ et $a_0 = 1$.

1°/ $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}dt - \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

$= \int_0^1 [(1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n]dt = \int_0^1 (1-t^2)^n(1-t^2-1)dt = -\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$.

2°/ On a pour tout $t \in [0,1]$: $t^2 \geq 0$ et $1-t^2 \geq 0$ d'où

$t^2(1-t^2)^n \geq 0$ et par suite $a_{n+1} - a_n \leq 0$ donc (a_n) est une suite convergente.

3°/a) $a_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}dt$; $\begin{cases} u'=1 \\ v=(1-t^2)^{n+1} \end{cases}$ d'où

$\begin{cases} u=t \\ v'=(n+1)(-2t)(1-t^2)^n \end{cases}$

On a : $a_{n+1} = [t.(1-t^2)^{n+1}]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt$ $a_{n+1} = (2n+2)(a_n - a_{n+1})$ (d'après B-1°)

On a ainsi $a_{n+1} = (2n+2)a_n - (2n+2)a_{n+1}$

et par suite $a_{n+1}(1+2n+2) = (2n+2)a_n$